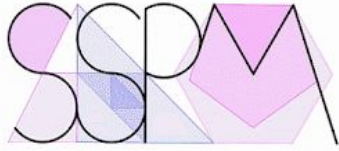




UNIVERSITÀ
DI TORINO



Dipartimento
Matematica



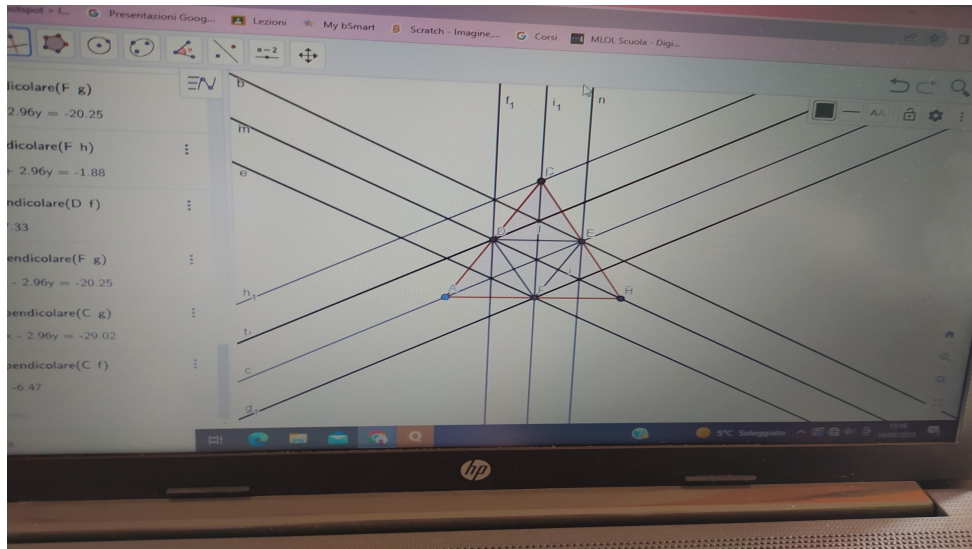
Piano Nazionale
Lauree Scientifiche



Liceo Matematico

DI. FI. MA. in Rete

POLIGONI E PUNTI MEDI



Autore: Stroppiana Daniela Teresa

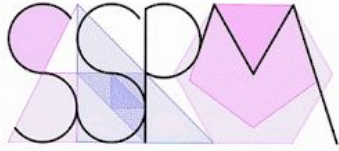
Docenti coinvolti: Buonincontri Roberta, Cristina Morone

Affiliazione : Istituto Comprensivo Canale

e-mail: d.stroppiana@iccanal.edu.it



Dipartimento
Matematica



DI. FI. MA. in Rete

UNIVERSITÀ
DI TORINO

Classi coinvolte:
classi seconde della Scuola secondaria di primo grado

Numero alunni:
per la prima fase tutti gli alunni delle sei seconde, per le fasi successive i
34 alunni individuati per la classe di potenziato

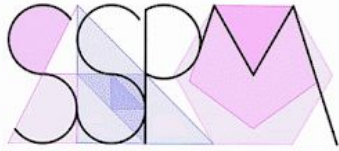
Ambito e nuclei concettuali coinvolti: spazio e figure
Riconoscere e denominare le forme del piano, le loro rappresentazioni e
cogliere le relazioni tra gli elementi.

Produrre argomentazioni.

Utilizzare il linguaggio matematico



Dipartimento
Matematica



DI. FI. MA. in Rete

UNIVERSITÀ
DI TORINO



DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete

FASE 1

- tutta la classe divisa in piccoli gruppi
- 2 ore
- svolgimento scheda 1
- discussione collettiva dei risultati emersi

- (1a) Disegna un triangolo equilatero ABC.

Chiama L il punto medio del lato AB, M il punto medio del lato BC e N il punto medio del lato AC.

Unisci i punti L, M, N. Che cosa ottieni? Che cosa osservi? Quali proprietà ha il triangolo LMN?

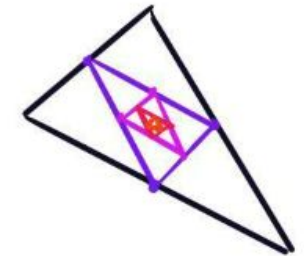
- (2a) Disegna ora un triangolo ABC isoscele, e costruisci il triangolo LMN dove L, M, N sono ancora i punti medi dei lati AB, BC, AC.

Che cosa osservi? Il triangolo LMN possiede ancora le proprietà trovate per LMN del punto precedente? Ne possiede altre? Possiede proprietà in più o in meno o nello stesso numero del triangolo al punto 1.?

- (3a) E se ABC fosse un triangolo rettangolo, potresti ancora fare le stesse considerazioni su LMN? E se invece ABC fosse un triangolo rettangolo isoscele?

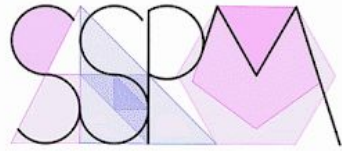
- (4a) E se ABC fosse un triangolo scaleno, che cosa potresti dire del triangolo LMN?

- (5a) Secondo te, il triangolo LMN ha delle proprietà che permangono indipendentemente dal tipo di triangolo ABC di partenza? Pensi che tali proprietà valgano sempre, qualunque sia il triangolo ABC, con LMN costruito usando i punti medi?



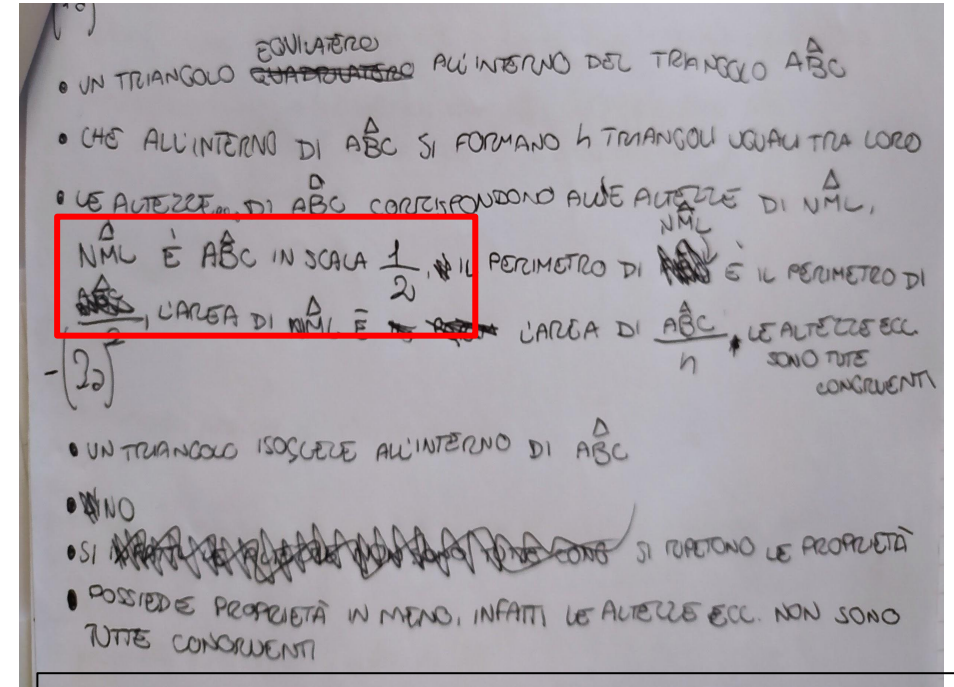
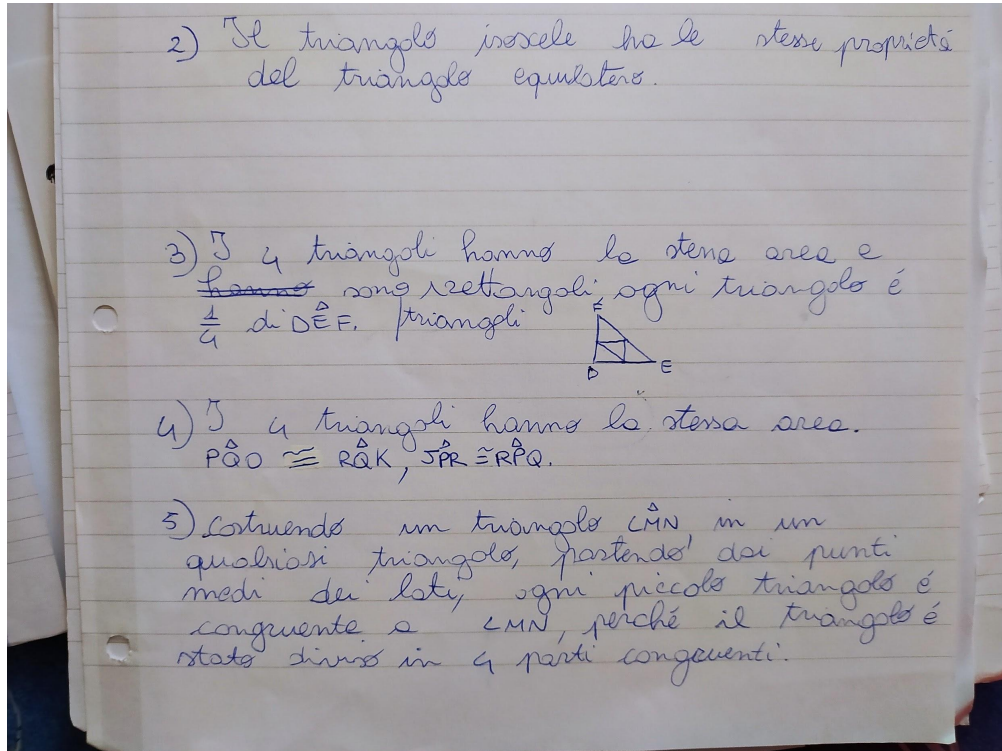


UNIVERSITÀ
DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete

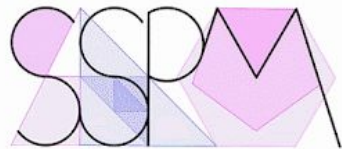
In tutti i gruppi sono state evidenziate le seguenti proprietà:
il triangolo LMN e' equivalente a un $\frac{1}{4}$ del triangolo ABC -
proprietà riscontrata in tutte le costruzioni.



In questo protocollo si usa la parola "SCALA"
relativa al lato e al perimetro del triangolo MLN
messo in relazione al triangolo ABC



UNIVERSITÀ
DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete

1) All'interno del triangolo equilatero $\triangle ABC$, si formano 4 triangoli equilateri congruenti tra di loro.
Il triangolo MNL è l'unico fra i 4 triangoli ad essere rovesciato e sembra che si "incastra" tra gli altri.
Tutti i triangoli hanno un lato con il triangolo MNL .
Se si ruotano AB e C i triangoli rimangono congruenti.

2) Il triangolo isoscele ha le stesse proprietà del triangolo equilatero.

Non è chiaro cosa volesse dire. Scritto in questo modo non è corretto. Probabilmente si intende dire che si ripetono le relazioni del punto 1

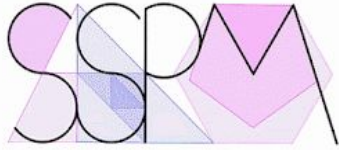
1 Otterremo un altro triangolo ~~equilatero~~ equilatero usando i punti medi dei lati AB, BC, CA .
Le sue 3 proprietà sono:
3 lati uguali. i lati $(\overline{EF}, \overline{FD}, \overline{DE})$
3 angoli uguali ($180:3 = 60^\circ$) sono la metà dei lati $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA})$
→ $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA})$

all'interno del triangolo equilatero ($\triangle ABC$) troviamo altri 4 triangoli ($\triangle EFB, \triangle AED, \triangle EFD, \triangle DEC$) questi triangoli sono tutti uguali ed equilateri.

2 Osserviamo che il triangolo che si è formato dentro al triangolo ($\triangle IJK$) è isoscele (come $\triangle IAB$) e ha la stessa ampiezza degli angoli. Inoltre $(\overline{KI}, \overline{LI}, \overline{JK})$ sono la metà dei lati $(\overline{AI}, \overline{BI}, \overline{CI})$.

all'interno del triangolo isoscele ($\triangle IAB$) troviamo altri 4 triangoli ($\triangle KIL, \triangle AIE, \triangle LKI, \triangle IKA$) questi triangoli sono tutti uguali ed isosceli e hanno tutti 2 angoli uguali.

In questo protocollo le osservazioni non vengono generalizzate dal punto 1 al punto 2, ma vengono descritte nei dettagli. Emerge la relazione tra gli angoli.



DI. FI. MA. in Rete

UNIVERSITÀ
DI TORINO



DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete

FASE 2

- classe di potenziato (classi seconde)
- 2 ore
- svolgimento scheda 2 - prima parte
- discussione collettiva dei risultati emersi

POTENZIATO - VERIFICA - GENERALIZZA

Dopo aver verificato (utilizzando gli strumenti di GG) che il triangolo che si ottiene unendo i punti medi dei lati di un triangolo equilatero è un triangolo equilatero.

Dopo aver verificato che il triangolo che si ottiene unendo i punti medi dei lati di un triangolo rettangolo è un triangolo rettangolo.

Cosa puoi dire dei triangoli ottenuti unendo i punti medi dei lati del triangolo isoscele, rettangolo isoscele e scaleno?

Cosa rimane invariato quando si osserva il triangolo iniziale e quello ottenuto unendo i punti medi dei lati? Puoi scrivere una proprietà che generalizzi tutte e 5 le costruzioni?

E se... al posto di un triangolo avessi un quadrilatero? Ipotizza cosa potrebbe accadere unendo i punti medi dei lati di un quadrilatero (quadrato, rettangolo, rombo, parallelogramma, qualsiasi)

POTENZIATO - DIMOSTRA

(1b) Disegna un quadrato ABCD.

Chiama L il punto medio del lato AB, M il punto medio del lato BC, N il punto medio del lato CD e O il punto medio del lato AD.

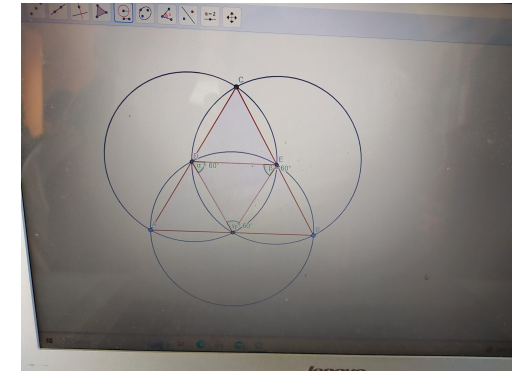
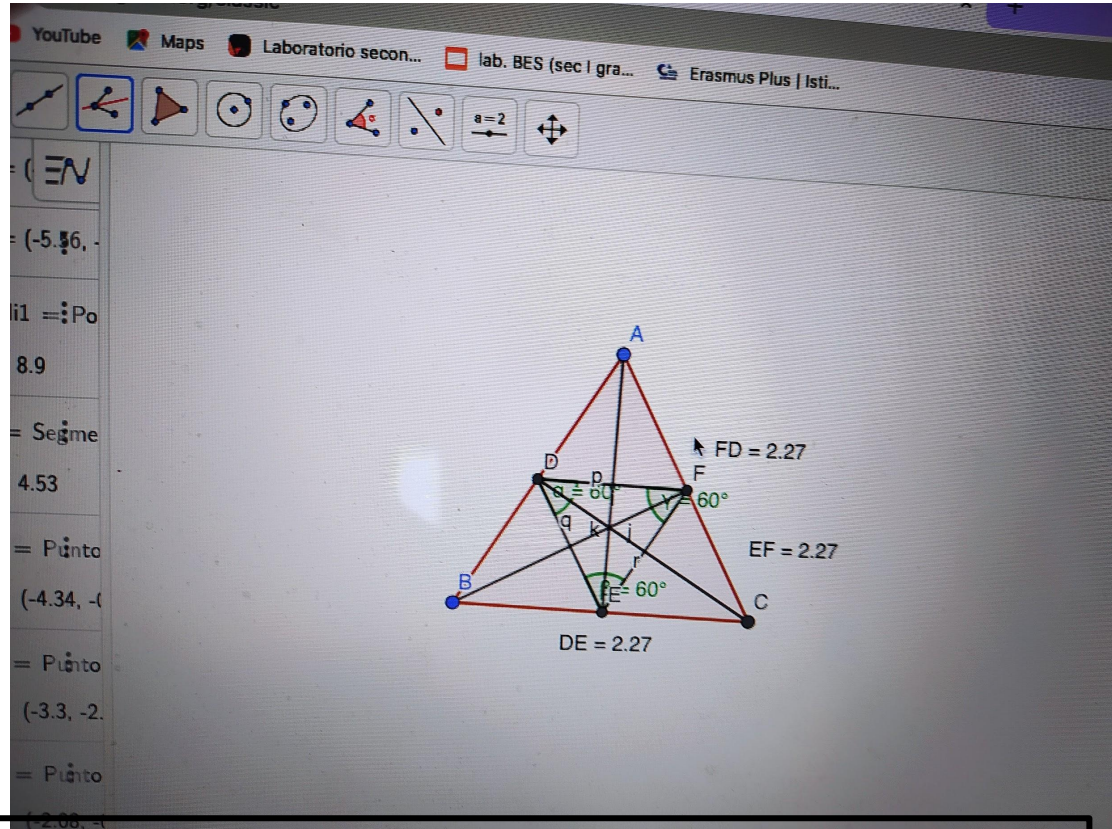
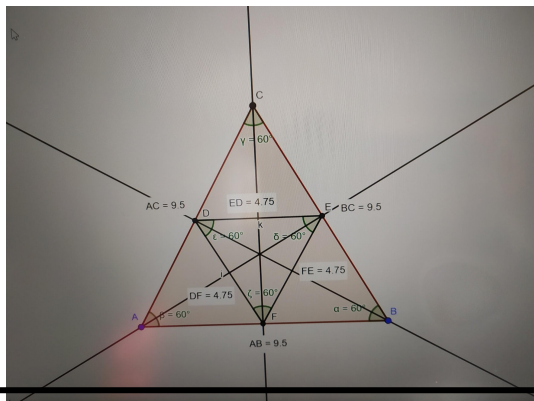
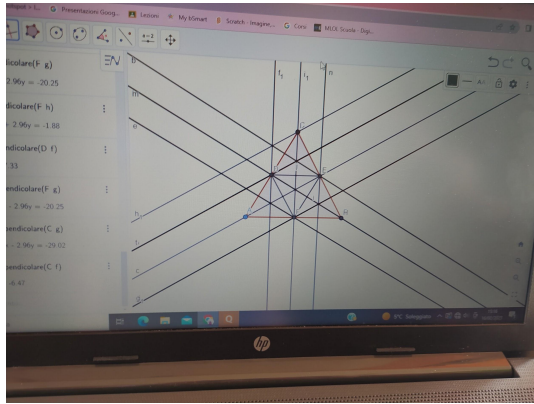
Unisci i punti L, M, N, O. Che cosa ottieni? Che cosa osservi? Quali proprietà ha il quadrilatero LMNO rispetto al quadrato ABCD?

Dimostra le tue congetture



DI. FI. MA. in Rete

UNIVERSITÀ
DI TORINO

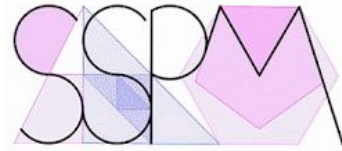


Si è discusso sulle condizioni necessarie e sufficienti per poter “dimostrare” che un triangolo è equilatero

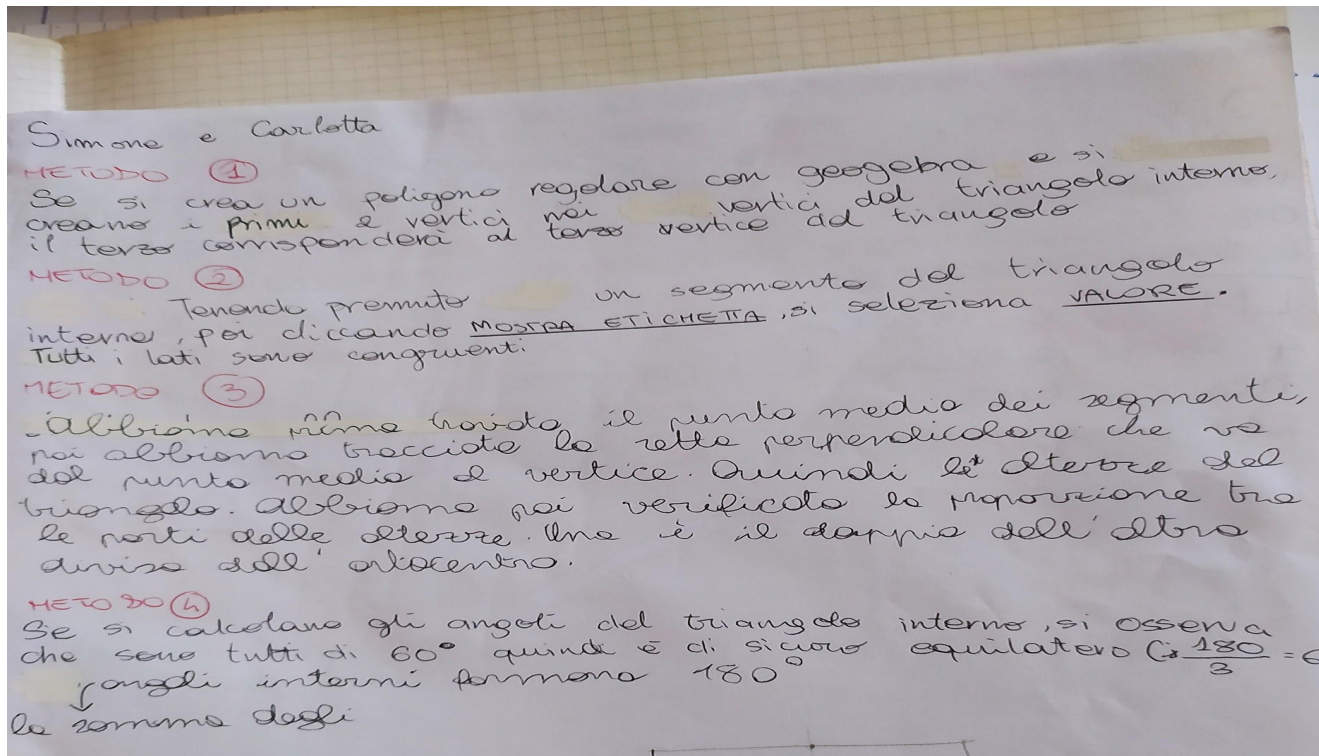
Alcune immagini di come i ragazzi hanno verificato utilizzando gli strumenti di GG che i triangoli ottenuti unendo i punti medi dei lati del triangolo equilatero ABC sono tutti equilateri



UNIVERSITÀ
DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete



Diversi modi per verificare che il triangolo MLN mantiene le caratteristiche del triangolo ABC.

Dopo aver utilizzato gli strumenti di GG Carlotta e Simone hanno utilizzato la forma scritta per spiegare come hanno fatto per verificare che se ABC è equilatero allora anche il triangolo MNL è equilatero.

(per il triangolo equilatero hanno utilizzato:

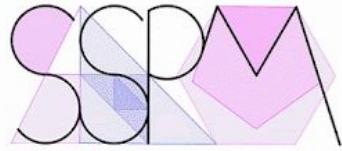
lati congruenti

angoli congruenti

mediane e altezze che coincidono)



UNIVERSITÀ
DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete

TENTATIVI DI GENERALIZZAZIONE

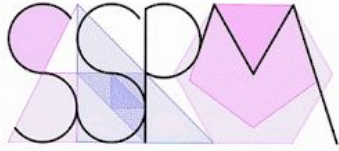
Quindi, tutti
HANNO gli stessi angoli dei triangoli + grandi.
I LATI dei TRIANGOLI + piccoli SONO LA METÀ DEGLI ANGOLI
dei triangoli + grandi.
- si formano 4 triangoli uguali.
- le proprietà rimangono le stesse per entrambi i triangoli.

In ogni triangolo, unendo i punti medi, il triangolo che si forma.
- sempre il triangolo stesso;
- il perimetro del triangolo piccolo è sempre la metà di quello iniziale;
- l'area del triangolo piccolo è sempre $\frac{1}{4}$ di quello grande;
- gli angoli del triangolo piccolo sono sempre uguali a quello grande.

5) Costruendo un triangolo CMN in un qualsiasi triangolo, partendo dai punti medi dei lati, ogni piccolo triangolo è congruente a CMN , perché il triangolo è stato diviso in 4 parti congruenti.



Dipartimento
Matematica



Piano Nazionale
Lauree Scientifiche



Liceo Matematico

DI. FI. MA. in Rete

UNIVERSITÀ
DI TORINO



DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



DI. FI. MA. in Rete

FASE 3

- classe di potenziato (classi seconde)
- 2 ore
- svolgimento scheda 2 - seconda parte
- discussione collettiva dei risultati emersi

POTENZIATO - VERIFICA - GENERALIZZA

Dopo aver verificato (utilizzando gli strumenti di GG) che il triangolo che si ottiene unendo i punti medi dei lati di un triangolo equilatero è un triangolo equilatero.

Dopo aver verificato che il triangolo che si ottiene unendo i punti medi dei lati di un triangolo rettangolo è un triangolo rettangolo.

Cosa puoi dire dei triangoli ottenuti unendo i punti medi dei lati del triangolo isoscele, rettangolo isoscele e scaleno?

Cosa rimane invariato quando si osserva il triangolo iniziale e quello ottenuto unendo i punti medi dei lati?

Puoi scrivere una proprietà che generalizzi tutte e 5 le costruzioni?

E se... al posto di un triangolo avessi un quadrilatero? Ipotizza cosa potrebbe accadere unendo i punti medi dei lati di un quadrilatero (quadrato, rettangolo, rombo, parallelogramma, qualsiasi)

POTENZIATO - DIMOSTRA

(1b) Disegna un quadrato ABCD.

Chiama L il punto medio del lato AB, M il punto medio del lato BC, N il punto medio del lato CD e O il punto medio del lato AD.

Unisci i punti L, M, N, O. Che cosa ottieni? Che cosa osservi? Quali proprietà ha il quadrilatero LMNO rispetto al quadrato ABCD?

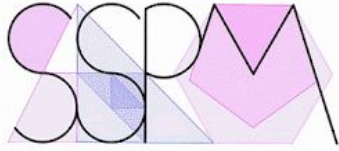
Dimostra le tue congetture



UNIVERSITÀ
DI TORINO



Dipartimento
Matematica



Piano Nazionale
Lauree Scientifiche



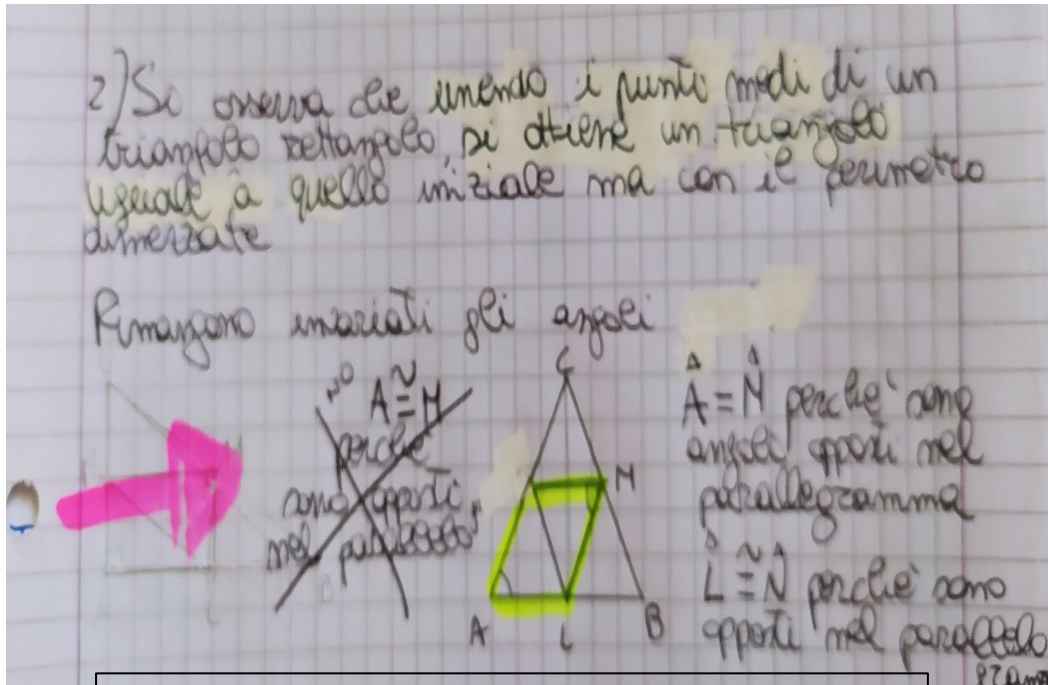
Liceo Matematico

DI. FI. MA. in Rete

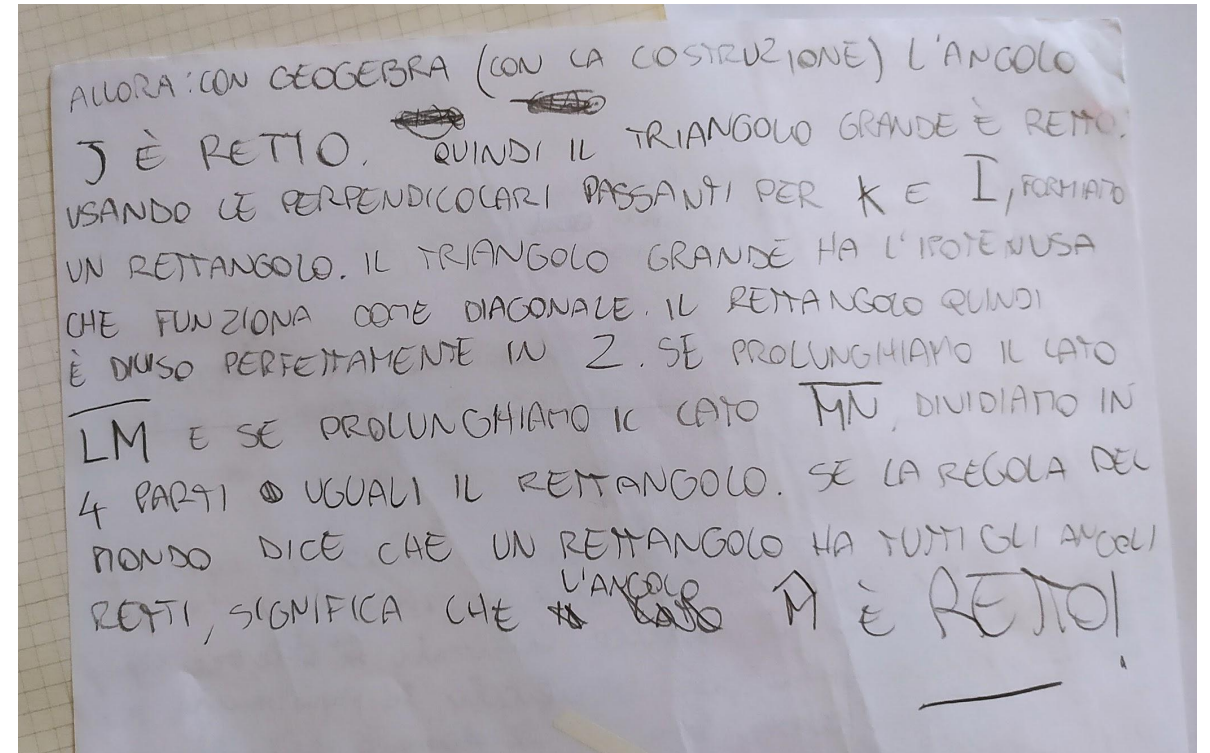
La dimostrazione che unendo i punti medi dei lati di un triangolo equilatero ABC si ottiene un triangolo LMN equilatero è stata guidata dalla docente in una discussione collettiva.

I gruppi hanno tentato di dimostrare che unendo i punti medi del triangolo rettangolo ABC si ottiene un triangolo rettangolo LMN .

In entrambi i protocolli si ragiona sui parallelismi, il modo di scrivere e/o di rappresentare le idee è “creativo”



Emerge la difficoltà a sviluppare un'idea corretta e di applicarla alla richiesta (dimostra che il triangolo MLN è rettangolo)



Emerge la difficoltà di sapersi spiegare per iscritto e di utilizzare un linguaggio non troppo contorto

La dimostrazione che unendo i punti medi dei lati di un quadrato si ottiene un quadrato ha avuto sviluppi più a fuoco.

gli angoli, in tutti i triangoli congruenti.

e si tracciano i segmenti MP e PN

Nel quadrato $ABCD$, se si trovano e uniscono i punti medi, si ottengono 4 tr. congruenti tra loro (rettangoli)

$\triangle MPR$ è un tr. rett. perché M è di 90° perché $\triangle MLP$ è un tr. rett. isoscele (lo dimostro tracc. una ~~se~~ circonferenza con centro L). La metà di M 45° perché $\frac{90 + 180 - 90}{2} = 45^\circ$

Il quadrato all'interno forma dei triangoli ^(rettangoli) congruenti, perché provengono dallo stesso punto medio.

Quindi ~~il triangolo~~ la figura all'interno è un quadrato perché ha i lati uguali \rightarrow i lati sono le diagonali dei quadrati + piccoli.

I triangoli formati sono tutti rettangoli isosceli, quindi angoli di 90° e 2 da $45^\circ \rightarrow 45^\circ \cdot 2 = 90^\circ =$ angolo retto

quadrato!

Se anche solo 1 angolo è retto allora anche gli altri angoli sono retti.

ALL' INTERNO DEL QUADRATO

POTENZIATO - DIMOSTRA

IL QUADRATO HA FORMATO UN QUADRATO E 4 TRIANGOLI RETTANGOLI.

IL QUADRATO INTERNO HA I LATI LUNGI LA METÀ DI QUELLI DEL QUADRATO PIÙ GRANDE. *DA VERIFICARE*

DIMOSTRAZIONE:

$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} = 90^\circ$

M PUNTO MEDIO \overline{BC}

N PUNTO MEDIO \overline{CD}

O PUNTO MEDIO \overline{AD}

L PUNTO MEDIO \overline{AB}

TRACCIANDO LE RETTE PASSANTI PER LN E NO SI TROVA IL PUNTO CENTRALE (S) E TRACCIANDO LA CIRCONFERENZA PUNTANDO IN S ARRIVANDO FINO AI PUNTI MEDI, $OS \cong SM \cong LS \cong SN$.

GIRA

Errore, probabilmente dovuto alle relazioni che erano state osservate per i triangoli.

Errore dovuto al "dare per scontato perchè era così anche prima"

Intuizione!

Per la dimostrazione è stata utilizzata la circonferenza senza conoscerne le proprietà.